



**ACADÉMIE
D'ORLÉANS-TOURS**

*Liberté
Égalité
Fraternité*

Olympiades inter-académiques de mathématiques

Classes de quatrième

Concours René Merckhoffer

Mardi 29 mars 2022

Durée de l'épreuve : 2 heures

Les calculatrices et le matériel de géométrie sont autorisés.

Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à ***rédigier sur leurs copies*** les solutions qu'ils proposent ; ils peuvent y ajouter des traces de leurs recherches et les résultats partiels auxquels ils sont parvenus.

Exercice 1

Sommes de chiffres

Dans cet exercice, les nombres considérés sont des entiers écrits selon la numération décimale.
Pour cet exercice, on appelle **poids** d'un nombre N la somme de ses chiffres.

1. Quel est le poids du nombre 29 ? Quel est le poids du nombre 7 646 ?
2. Proposer trois nombres différents de même poids 42.
3. Est-il exact de dire que « plus un nombre a de chiffres, plus son poids est élevé » ?
4. Quel est le plus petit nombre de poids 50 ?
5. Quel est le plus petit nombre de poids 2 022 ?
6. Peut-on trouver un nombre ne s'écrivant qu'avec des 5 et des 7 et dont le poids soit 53 ?
7. Peut-on trouver un nombre ne s'écrivant qu'avec des 3 et des 6 et dont le poids soit 200 ?

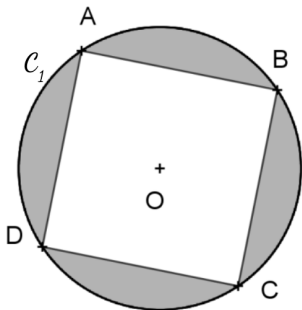
Exercice 2

Carré inscrit dans un cercle inscrit dans un carré...

L'unité de longueur est le centimètre.

Attention : les figures données ne sont pas à la même échelle.

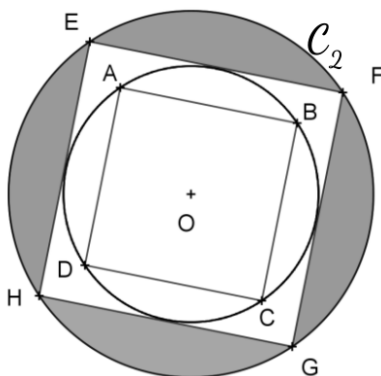
Tous les résultats numériques demandés sont attendus en valeur exacte.



Sur la figure ci-contre est représenté le cercle C_1 , de centre O et de rayon 2.

Les segments $[AC]$ et $[BD]$ sont deux diamètres perpendiculaires de ce cercle.

1. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?
On dit que le cercle C_1 est le cercle circonscrit au carré $ABCD$.
2. Quelle est l'aire de la partie grisée de la figure ?



Sur la figure ci-contre, on considère le carré $EFGH$ dont les côtés sont parallèles à ceux de $ABCD$ et tangents au cercle C_1 . On dit que le cercle C_1 est inscrit dans le carré $EFGH$. On considère de même que précédemment le cercle C_2 circonscrit au carré $EFGH$. La figure ci-dessous représente cette situation.

3. Calculer l'aire de la partie grisée sur cette nouvelle figure.
4. Sur le même principe, on peut construire une nouvelle figure avec un cercle C_3 circonscrit à un nouveau carré $IJKL$ dont les côtés seraient tangents à C_2 et parallèles aux côtés du carré $EFGH$. Quelle est, sur cette nouvelle figure, l'aire comprise entre le cercle C_3 et les côtés du carré $IJKL$?

Exercice 3

Triplets pythagoriciens

Une unité de longueur est donnée dans le plan. Un triangle ABC a pour côtés $AB = 8$, $AC = 15$ et $BC = 17$.



Corde à 13 nœuds et triangle égyptien



La tablette Plimpton 322 (Université Columbia, New-York) témoigne de recherches conduites par des Babyloniens.

1. Montrer que ce triangle est rectangle, en indiquant quel point est le sommet de l'angle droit.

Plus généralement, on s'intéresse aux triangles rectangles dont les côtés ont des longueurs entières. On pose $AB = m$, $AC = n$ et $BC = p$. On fait l'hypothèse que $m < n < p$ et on dit que le triplet (m, n, p) est pythagoricien.

2.

a. Si (m, n, p) est un triplet pythagoricien, quel point est le sommet de l'angle droit du triangle rectangle ABC associé ?

b. Montrer que $(3, 4, 5)$ est un triplet pythagoricien. Les triangles associés sont les « triangles égyptiens ».

c. Montrer que, si le triplet $(m, n, 5)$ est pythagoricien, alors $m = 3$ et $n = 4$.

3. On suppose que le triplet $(5, n, p)$ est pythagoricien.

a. Montrer que $(p - n)(p + n) = 25$.

b. Comparer $p + n$ et $p - n$ et en déduire leurs valeurs puis finalement les valeurs de p et de n . Le triangle associé est dit « babylonien ».

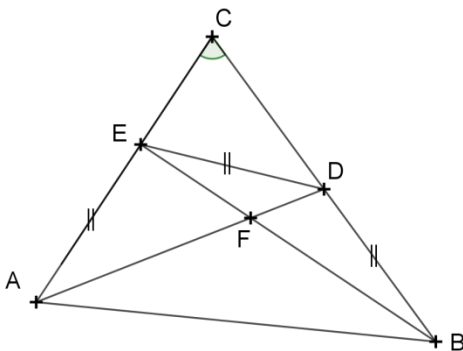
4. Existe-t-il des entiers m et p tels que le triplet $(m, 5, p)$ soit pythagoricien ?

Exercice 4

Angle inconnu

L'angle en C du triangle ABC mesure 70° . On a placé sur le côté $[BC]$ le point D et sur le côté $[AC]$ le point E tels que :

$BD = DE = EA$. Les segments $[BE]$ et $[AD]$ se coupent en F .



Quelle est la mesure de l'angle \hat{AFB} ?